IF4-ALG2 - TD d'optimisation

Y.Hammam & H. Talbot

9 février 2018

1 Solutions

Très important : Essayez de trouver la solution par vous-même avant d'utiliser ce corrigé.

1.1 Problème 1

1.1.1 Variables

On labelle les variables $x_1, x_2, \ldots$.

1.1.2 Contraintes

Les contraintes sur les heures machines et sur les disponibilités en matière première permettent d'écrire respectivement :

$$\begin{array}{rcrcrl} 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & \leq 10 \\ x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 & \leq 15 \end{array}$$

De plus toutes les variables x_i sont positives ou nulles.

La fonction de profit prend la forme :

$$\max z = 6x_1 + 4x_2 + 5x_3$$

1.1.3 Forme standard

On doit introduire autant de variable d'écart que de contraintes non nulles, soit deux variables x_4 et x_5. D'autre part la forme standard impose une minimisation, donc on minimisera $-z$.

Toutes les contraintes sont du type $\leq$ donc les variables d'écart sont positives.

La forme standard est donc :

$$\begin{array}{lccccccccc}
\min & -6x_1 & & -4x_2 & & -5x_3 & & & & \\
 & 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & + & x_4 & & = 10 \\
 & x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 & & & + \quad x5 & = 15
\end{array}$$

$$x_1, x_2, \ldots, x_5 \geq 0$$

Ce qui donne :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 10 \\ 15 \end{bmatrix}$$

$$C^T = \begin{bmatrix} -6 & -4 & -5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

1.1.4 Déroulement

Nous prenons comme base initiale la base constituée par les variables d'écart, c-à-d x_4 et x_5. Une raison pour cela est que ça nous donne une base B initiale particulièrement simple.

1. iteration
   - $VB = \{x_4 x_5\}, VHB = \{x_1 x_2 x_3\}$
   - $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$,
   - $\bar{b} = \begin{bmatrix} 10 & 15 \end{bmatrix}$
   - $\bar{C}_e^T = \begin{bmatrix} -6 & -4 & -5 \end{bmatrix}$
   - ratios=$\begin{bmatrix} 5 & 15 \end{bmatrix}$
   - donc, x_1 entre, x_4 sort.
2. iteration
   - $VB = \{x_1 x_5\}, VHB = \{x_2 x_3 x_4\}$
   - $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$,
   - $B^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 \end{bmatrix}$,
   - $\bar{b} = \begin{bmatrix} 5 & 10 \end{bmatrix}$
   - $\bar{C}_e^T = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 3 \end{bmatrix}$
   - ratios=$\begin{bmatrix} 10 & 4 \end{bmatrix}$
   - donc, x_3 entre, x_5 sort.
3. iteration
   - $VB = \{x_3 x_5\}, VHB = \{x_2 x_4 x_5\}$
   - $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$,
   - $B^{-1} = \begin{bmatrix} 0.6 & -0.2 \\ -0.2 & 0.4 \end{bmatrix}$,

— $\bar{b} = [\ 3 \quad 4\ ]$
— $\bar{C}_e^T = [\ 7 \quad 2.6 \quad 0.8\ ]$
— On a trouvé l'optimum. avec $z = -38$.

1.2 Problème 2

1.2.1 Formulation

— On appelle
  — x_1 le nombre de A *produits*
  — x_2 le nombre de B produits
  — x_3 le nombre de C produits
— Egalement :
  — x'_1 le nombre de A vendus
  — x'_2 le nombre de B vendus
  — x'_3 le nombre de C vendus
— Avec ça, la fonction-objectif est :$\max z = 10x'_1 + 56x'_2 + 100x'_3$.
— La contrainte sur l'heure s'exprime $x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 35$.
— Le fait qu'on doive consommer 2 A pour produire un B s'écrit $x_1 \geq 2x_2$.
— Le fait qu'on doive consommer 1 B pour produire un C s'écrit $x_2 \geq x_3$.
— pour passer de x a x' c'est simple :

$$
\begin{aligned}
x'_1 &= x_1 - 2x_2 \\
x'_2 &= x_2 - x_3 \\
x'_3 &= x_3
\end{aligned}
$$

1.2.2 Résolution

Avec ça deux pistes :

1. exprimer tout en fonctions des x (non prime). C'est tentant, il n'y a qu'a exprimer un $\max z$ nouveau.
   En substituant : $\max z = 10x_1 + 36x_2 + 44x_3$
   Ce qui donne le PL suivant :

$$
\begin{array}{lllll}
\max z & = 10x_1 & +36x_2 & +44x_3 & \\
 & x_1 & +2x_2 & +3x_3 & \leq 35 \\
 & -x_1 & +2x_2 & & \leq 0 \\
 & & -x_2 & +x_3 & \leq 0
\end{array}
$$

   C'est pénible a résoudre, on a des matrices 3×3 à inverser, mais finalement l'optimum est obtenu avec $VB = \{x_1, x_2, x_3\}$:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 10 \\
x_2 &= 5 \\
x_3 &= 5
\end{aligned}
$$

Pour un profit de 500 euros.

2. Exprimer tout en fonction des x'

   il faut inverser la relation $x \leftrightarrow x'$, c'est simple à faire. On trouve

$$
\begin{aligned}
x_3 &= x'_3 \\
x_2 &= x'_2 + x'_3 \\
x_1 &= x'_1 + 2x'_2 + 2x'_3
\end{aligned}
$$

   Il faut réexprimer la contrainte horaire, en substituant $x'_1 + 4x'_2 + 7x'_3 \leq 35$.
   les autres relation s'expriment par x'_1 et x'_2 positifs ou nuls.
   Là pas de matrice à inverser, on a un knapsack standard, et l'optimum est immédiatement $x'_3 = 5$, pour un profit de 500 euros.
   C'est exactement la même solution bien sûr, exprimée autrement.